

2014

Подготовка к ЕГЭ по математике

Теория для решения задач В5

Открытый банк заданий ЕГЭ по
математике <http://mathege.ru>

Наталья и Александр Крутицких

www.matematikalegko.ru

01.01.2014



А.С. Крутицких и Н.С. Крутицких. Подготовка к ЕГЭ по математике.

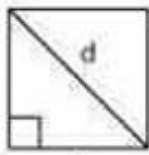
<http://matematikalegko.ru>

Для решения задач необходимо знать:

- формулы площадей фигур (квадрат, прямоугольник, треугольник, трапеция, параллелограмм, четырёхугольник, круг, сектор круга)
- теорему Пифагора
- теорему косинусов
- теорему о сумме углов треугольника
- понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса в прямоугольном треугольнике
- процесс решения квадратного уравнения (формулы дискриминанта и корней)
- формулы для решения треугольника (отношения высот, медиан, формулы связи радиусов вписанной и описанной окружности с его площадью)
- формулу для нахождения длины отрезка на координатной плоскости
- формулу для нахождения координат середины отрезка
- понятие вектора, координаты вектора
- понятие модуля вектора, формулу длины вектора
- скалярное произведение векторов
- уравнение прямой, угловой коэффициент
- формулу уравнения прямой проходящей через две данные точки
- формулу Пика (знать необязательно, но желательно)

Формулы площадей фигур (квадрат, прямоугольник, треугольник, трапеция, параллелограмм, четырёхугольник, круг, сектор круга)

ПЛОЩАДЬ

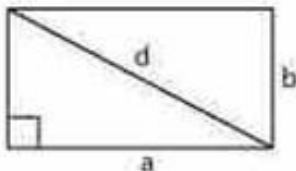


квадрат

$$S = a^2 \quad P = 4a \quad d = a\sqrt{2}$$

P – сумма сторон фигуры

d – длина диагонали

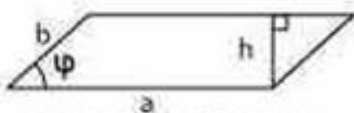


прямоугольник

$$S = a \cdot b \quad d = \sqrt{a^2 + b^2} \quad P = 2a + 2b$$

P – сумма сторон прямоугольника

d – длина диагонали

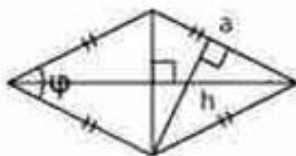


параллелограмм

$$S = a \cdot h$$

$$S = a \cdot b \cdot \sin \varphi \quad h - \text{высота}$$

$$P = 2a + 2b \quad P - \text{сумма сторон}$$

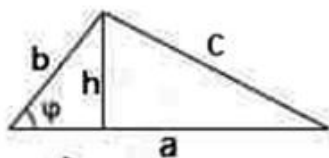


ромб

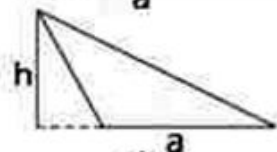
$$S = a \cdot h \quad P = 4a \quad P - \text{периметр}$$

$$S = a^2 \cdot \sin \varphi \quad h - \text{высота}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \quad d_1 \text{ и } d_2 - \text{диагонали}$$

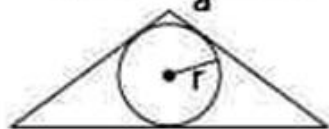


$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \quad S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \varphi$$



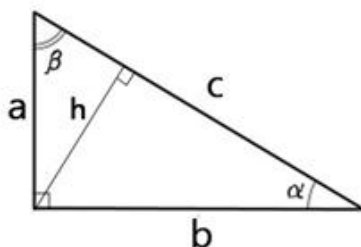
$$S = p \cdot r \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ — полупериметр}$$



r — радиус вписанной окружности

треугольник



$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

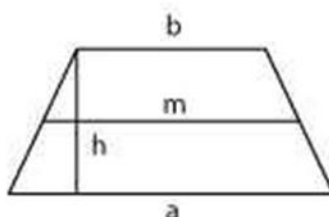
$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

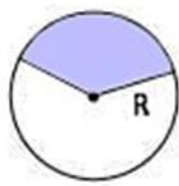


трапеция

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h \quad a \text{ и } b \text{ — основания}$$

h — высота

$$m = \frac{a+b}{2} \text{ — средняя линия}$$



круг

$$S = \pi R^2 \quad L = 2\pi R = \pi D$$

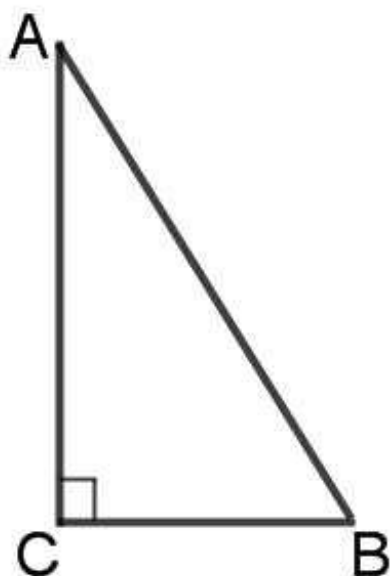
D — диаметр L — длина окружности

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n \quad \text{где } n \text{ — центральный угол}$$

Теорема Пифагора

*В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы
равен сумме квадратов катетов.*

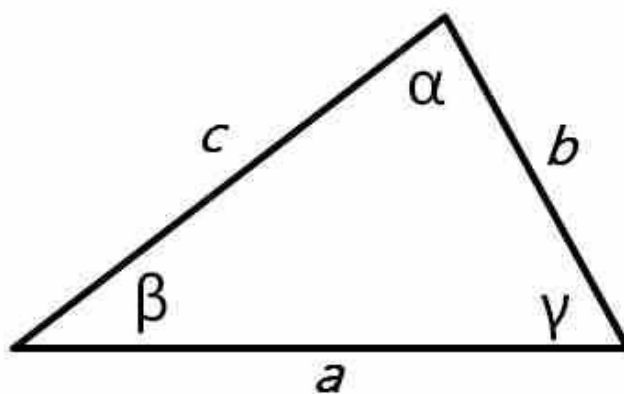
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$



Зная любые две стороны, мы можем найти третью сторону треугольника.

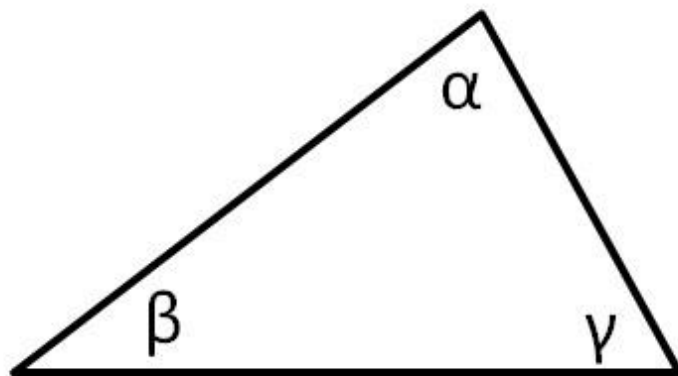
Теорема косинусов

Теорема: *квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.*



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

Сумма углов треугольника



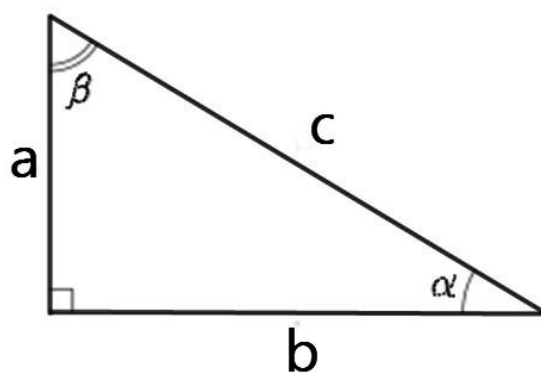
Теорема: *сумма углов треугольника равна 180 градусам.*

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Вывод: если нам будут известны любые два угла в треугольнике, то мы всегда сможем найти третий угол.

Понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса в прямоугольном треугольнике

Гипотенуза прямоугольного треугольника — это сторона, лежащая напротив прямого угла. **Катеты** — стороны, лежащие напротив острых углов.



Катет a , лежащий напротив угла α , называется **противолежащим** (по отношению к углу α). Другой катет b , который лежит на одной из сторон угла α , называется **прилежащим**.

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Косинус острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Другое (равносильное) определение – тангенсом острого угла называется отношение синуса угла к его косинусу:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Котангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение прилежащего катета к противолежащему (или, что то же самое, отношение косинуса к синусу):

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Решение квадратного уравнения (формулы дискриминанта и корней)

Квадратное уравнение (общий вид):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Находим дискриминант: $D = b^2 - 4ac$.

Находим корни уравнения по формулам:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Формулы для решения треугольника (соотношения высот, медиана, биссектриса, высота, формулы связи радиусов вписанной и описанной окружности с его площадью)

Известно следующее соотношение в треугольнике:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = bc : ac : ab.$$

где a, b, c – стороны треугольника

h_a, h_b, h_c – высоты проведённые к соответствующим сторонам

Формулы для вычисления медианы, биссектрисы, высоты через стороны треугольника:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \quad m - \text{медиана}$$

$$l_a^2 = \frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2} \quad l - \text{биссектриса}$$

$$h_a^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2} \quad h - \text{высота}$$

Формулы площади треугольника:

$$S = r \cdot \frac{a+b+c}{2} \quad \text{где } r - \text{ радиус вписанной окружности}$$

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \quad \text{где } R - \text{ радиус описанной окружности}$$

a, b, c – стороны треугольника

Нахождение длины отрезка на координатной плоскости

Формула для определения длины отрезка, если известны координаты его концов:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

где $A(x_A; y_A)$ $B(x_B; y_B)$

Нахождение координат середины отрезка

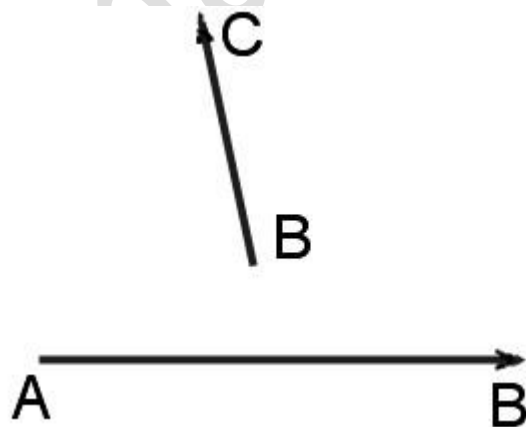
Пусть точка C является серединой отрезка AB . Формула для нахождения координат середины отрезка:

$$C \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

где $A(x_A; y_A)$ $B(x_B; y_B)$

Понятие вектора, координаты вектора

Вектор это направленный отрезок.



Все векторы, имеющие одинаковое направление и равные по длине являются равными.

Координаты вектора: чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конца вычесть соответствующие координаты начала:

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A), \text{ где } A(x_A; y_A) \text{ и } B(x_B; y_B).$$

Понятие модуля вектора, длина вектора, скалярное произведение векторов

Модулем вектора называется его длина, определяется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{где } \vec{a}(a_1; a_2)$$

Формула для определения длины вектора, если известны координаты его начала и конца:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Формулы скалярного произведения векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\vec{b}}$$

То есть скалярное произведение векторов равно произведению его длин на косинус угла между ними.

Если известны координаты векторов, можем найти угол между векторами:

$$\cos \widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Уравнение прямой, угловой коэффициент

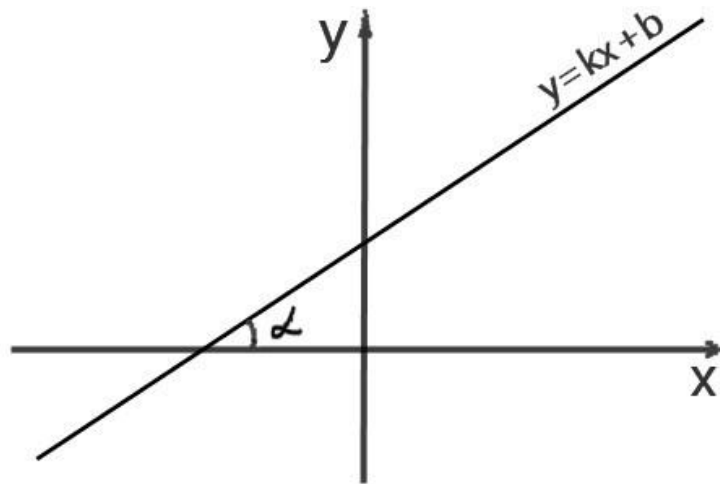
Уравнение прямой на координатной плоскости имеет вид:

$$y = kx + b \quad \text{где } k \text{ это и есть угловой коэффициент прямой}$$

$$k = \operatorname{tg} \alpha \quad \alpha \text{ это угол между прямой и осью } ox$$

он лежит в пределах от 0 до 180 градусов

Покажем этот угол:



Уравнения прямой проходящей через две данные точки

Формула уравнения прямой проходящей через две данные точки имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{где } (x_1; y_1) \text{ и } (x_2; y_2) \text{ — координаты точек}$$

ФОРМУЛА ПИКА (ПРИМЕР)

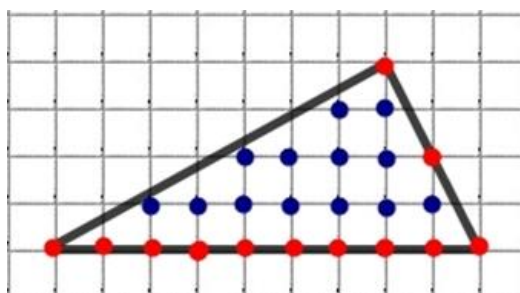
Площадь искомой фигуры (в данном случае рассмотрим треугольник) можно найти по формуле:

$$S = \frac{M}{2} + N - 1$$

где M — количество узлов на границе треугольника

(на сторонах и вершинах)

N — количество узлов внутри треугольника



$$M = 12 \text{ (красный цвет)}$$

$$N = 13 \text{ (синий цвет)}$$

$$1 \text{ клетка} = 1 \text{ см}$$

$$S = \frac{12}{2} + 13 - 1 = 18 \text{ см}^2$$

matematikalegko.ru